

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457199

排名 - 1199

多变量微积分笔记23——散度定理

散度定理，又称为高斯散度定理、高斯公式、高斯 - 奥斯特罗格拉德斯基公式或高 - 奥公式，是指在向量分析中，一个把向量场通过曲面的流动（即通量）与曲面内部的向量场的表现联系起来的定理。它经常应用于矢量分析中。矢量场的散度在体积D上的体积分等于矢量场在限定该体积的闭合曲面s上的面积分。

散度定理

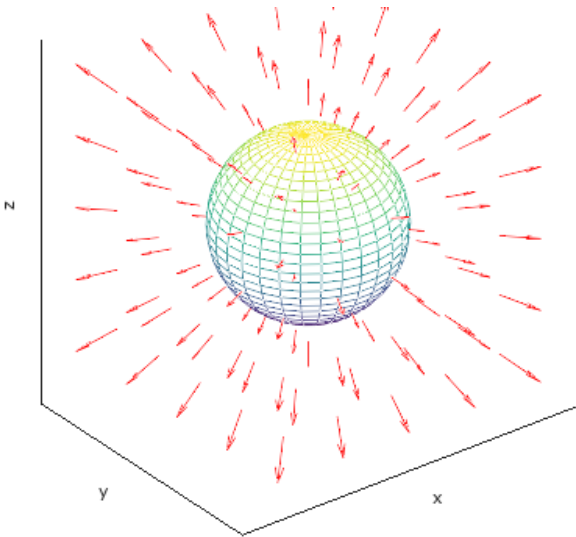
散度定理是三维空间中的格林公式，大概是这样说的：如果S是一个封闭曲面，D是被曲面封闭的空间，**n**是指向D外侧的单位法向量，**F** = **Pi** + **Qj** + **Rk**是空间向量场，它在D上处处可微，则曲面S的通量等于散度在D上的体积分：

$$\oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dv = \iiint_D \underbrace{P_x + Q_y + R_z}_{\operatorname{div}(\vec{F})} dv$$

如果结合梯度，散度定理还有另一种写法：

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle \\ \nabla \cdot \vec{F} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle P, Q, R \rangle = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\ \oiint_S \vec{F} d\vec{S} &= \iiint_D \nabla \cdot \vec{F} dv \end{aligned}$$

在介绍空间向量场中的通量时，看过这个示例：以a为半径的球面内，求向量场**F** = <0,0,z>的通量。



随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

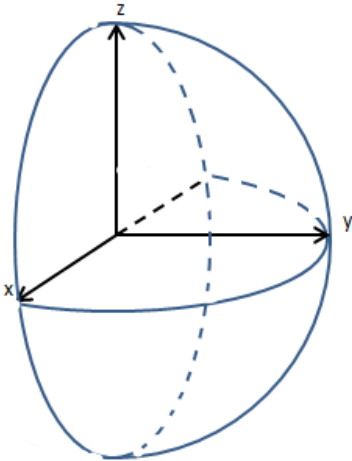
当时是用了球坐标系进行转换，最终得到结果是 $4\pi a^3/3$ ，现在可以使用散度定理直接计算：

$$\oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_D P_x + Q_y + R_z dv = \underbrace{\iiint_D dv}_{\text{球体体积}} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

综合示例

示例1

如下图所示，求半径为r的半球，最在 $\mathbf{F} = y\mathbf{j}$ 中的半球球面的通量。



因为散度定理要求曲面闭合，所以这里不能直接使用散度定理。如果设球面是 S_1 ，半球在 xz 轴的切面是 S_2 ，由于 S_1 和 S_2 形成了闭合的曲面，所以：

$$\begin{aligned}\oiint_{S_1+S_2} \vec{F} d\vec{S} &= \iint_{S_1} \vec{F} d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} d\vec{S} \\ \oiint_{S_1+S_2} \vec{F} d\vec{S} &= \iiint_D \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} dv = \iiint_D dv = \frac{2\pi r^3}{3}\end{aligned}$$

S_1 是在 xz 平面上的圆， $f(x,y,z) = x^2 + z^2 = r^2$

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \vec{F} d\vec{S} &= \iint_R \vec{F} \cdot \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle dxdy = \iint_R \langle 0, 1, 0 \rangle \cdot \langle -f_x, 0, 1 \rangle dxdy = 0 \\ \iint_{S_1} \vec{F} d\vec{S} &= \oiint_{S_1+S_2} \vec{F} d\vec{S} - \iint_{S_2} \vec{F} d\vec{S} = \frac{2\pi r^3}{3}\end{aligned}$$

示例2

如下图所示，圆柱体轴心是 z 轴，底面中心点是原点，半径是 R ，高是 h ，求柱体在 $\mathbf{F} = \langle x^4y, -2x^3y^2, z^2 \rangle$ 中的通量。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

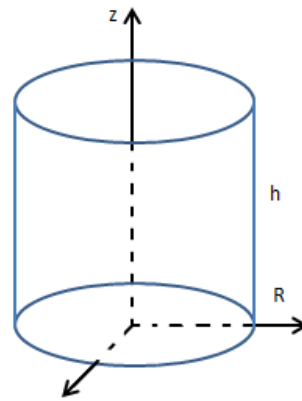
--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU



闭合曲面，直接套公式：

$$\begin{aligned} \text{Flus} &= \oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_D \left(\frac{\partial x^4 y}{\partial x} + \frac{\partial -x^3 y^2}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} \right) dv \\ \frac{\partial x^4 y}{\partial x} + \frac{\partial -x^3 y^2}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} &= 4x^3 y - 4x^3 y + 2z = 2z \\ \iiint_D \left(\frac{\partial x^4 y}{\partial x} + \frac{\partial -x^3 y^2}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} \right) dv &= \iiint_D 2z dv \end{aligned}$$

使用柱坐标转换：

$$\iiint_D 2z dv = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h 2z r dz dr d\theta = \pi h^2 R^2$$

示例3

正方体在向量场 $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle / \rho^3$ 中， $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

a) 如果向量场中正方体中处处有定义，证明封闭曲面的通量是0；

b) 如果正方体的几个顶点是 $(\pm 2, \pm 2, \pm 2)$ ，能否根据a的结论认为正方体表面的通量是0？

a)

根据散度定理，如果闭合曲面在向量场中处处可微，则流过闭合曲面的通量等于散度在闭合曲面的体积积分：

$$\oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dv = \iiint_D \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\rho^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\rho^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\rho^3} dv$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\rho^3} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\rho^3} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial u} u^{\frac{1}{2}} \right)}_{u=\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left(\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \right) (2x) = u^{-\frac{1}{2}} x = \frac{x}{\rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\rho^3} = \frac{\partial}{\partial x} x \rho^{-3} = x' \rho^{-3} + x(\rho^{-3})' = \rho^{-3} + x(\rho^{-3})'$$

$$(\rho^{-3})' = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^{-3} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = -(3\rho^{-4}) \left(\frac{x}{\rho} \right) = -3x\rho^{-5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\rho^3} = \rho^{-3} + x(\rho^{-3})' = \rho^{-3} - 3x^2\rho^{-5}$$

$$\text{the same as } \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\rho^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\rho^3} = \rho^{-3} - 3y^2\rho^{-5}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\rho^3} = \rho^{-3} - 3z^2\rho^{-5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\rho^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\rho^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\rho^3} = 3\rho^{-3} - 3\rho^{-5} \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{\rho^2} = 0$$

$$\oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_D \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\rho^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\rho^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\rho^3} dv = 0$$

b)

答案是No，因为在0点处不可微，所以不能直接使用散度定理。

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [散度定理](#)

好文要顶

关注我

收藏该文





我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: 多变量微积分笔记22——空间曲面的通量

» 下一篇: ML (附录2) ——最小二乘法

posted on 2018-06-08 14:05

我是8位的

阅读(5089)

评论(0)

编辑

收藏

举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

ASP.NET Core

12,000

800

900

1-9 位

WebForms升级到ASP.NET Core

fineui.com

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园
Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes